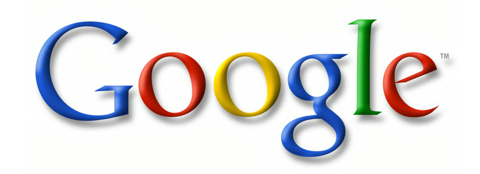
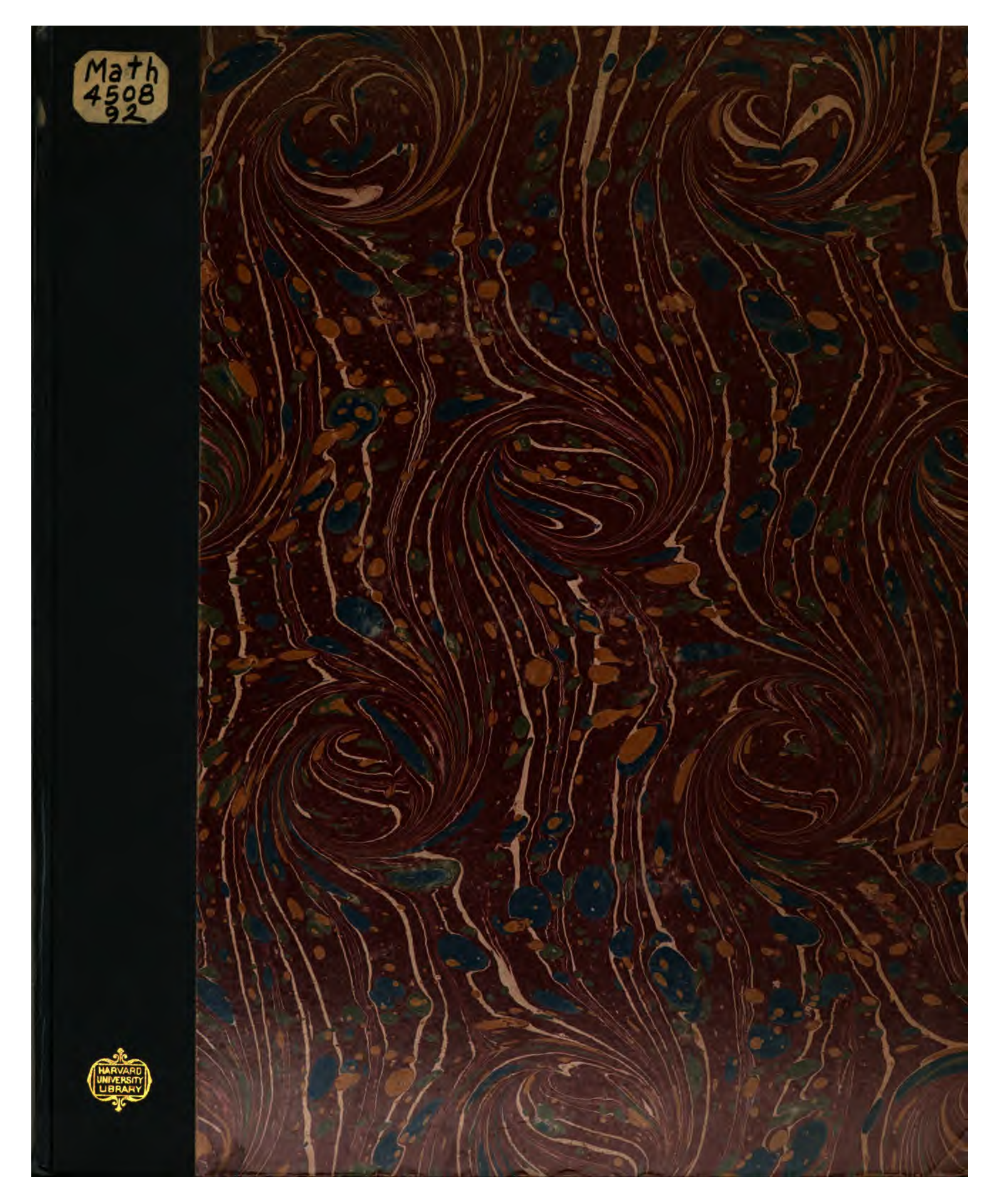
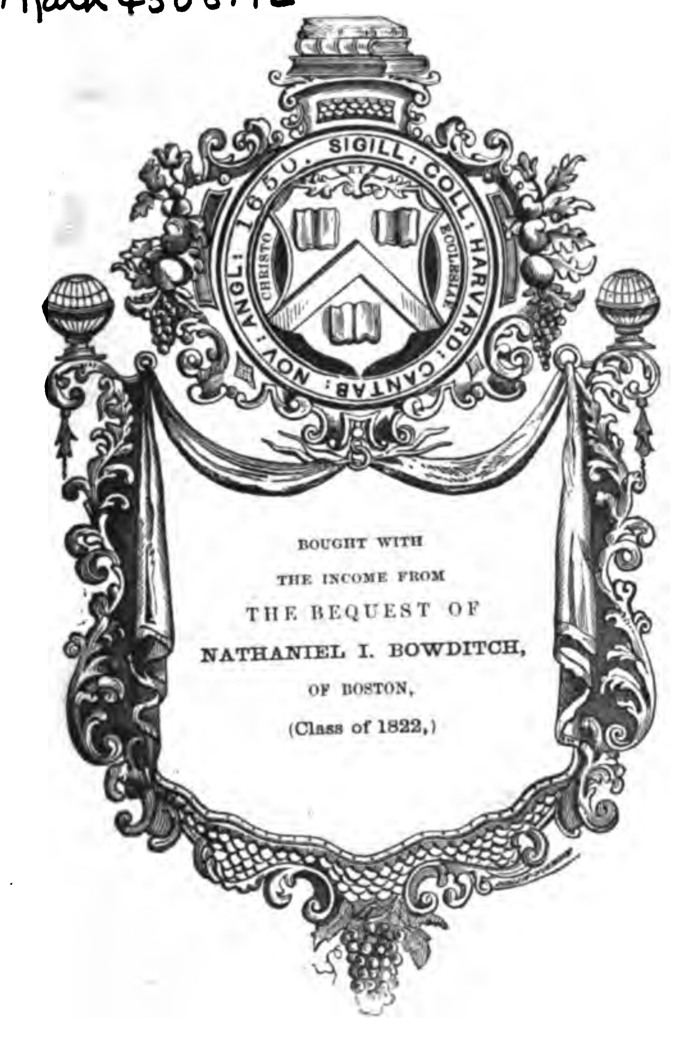
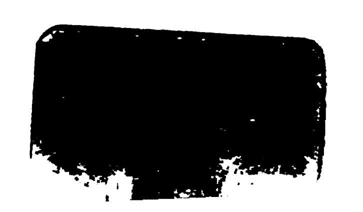





Math
4508
92
HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY


SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)



Über eine gewisse Klasse continuierlicher Gruppen und ihren Zusammenhang mit den Additionstheoremen.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung

der philosophischen Doctorwürde,

welche

mit Genehmigung der hohen philosophischen Facultät

der

Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

zugleich mit den angehängten Thesen

Donnerstag den 10. November 1892 vormittags 11 Uhr

öffentlich verteidigen wird

Georg Bohlmann

aus Berlin.

Opponenten:

Herr **H. Kühne**, Dr. phil.

„ **H. Krüger**, cand phil.

Halle a. S.,

Hofbuchdruckerei von C. A. Kaemmerer & Co.

1892.

Über eine gewisse Klasse continuierlicher Gruppen und ihren Zusammenhang mit den Additionstheoremen.

Zum besseren Verständnisse der folgenden Untersuchungen wird es nützlich sein einige Worte über ihre Entstehung voranzuschicken.

Die Aufgabe alle Functionen mit algebraischem Additionstheorem zu finden, das heisst, diejenigen Φ zu bestimmen, welche der Gleichung

$$\Phi y = \Phi x + \Phi a \qquad (1.)$$

genügen, so dass y eine algebraische Function von x und a wird, ist von Herrn *Weierstrass* gelöst worden, indem er zeigte, dass Φ in diesem Falle nur ein elliptisches oder cyclometrisches Integral einer algebraischen Function oder selbst eine algebraische Function sein kann. Das Problem ist identisch mit dem alle algebraischen Integrale der Differentialgleichung

$$\psi y \, dy - \psi x \, dx = 0 \qquad (2.)$$

anzugeben; ψ bedeutet die Ableitung von Φ. a ist die Integrationsconstante.

Nun scheint es mir aber doch von Wichtigkeit das Problem in seiner zweiten Gestalt direkt zu behandeln, indem man durch eine Discussion der Eigenschaften der Integrale y von (2) zur Aufstellung aller algebraischen gelangt. Ich stellte mir daher die Aufgabe alle Functionen ψ zu bestimmen, für die y algebraisch wird, vorerst aber von der speziellen Natur der Function ψ zu abstrahieren und die Integrale von (2) für — auch hinsichtlich ihrer functionalen Beschaffenheit — unbestimmte Coefficienten zu charakterisieren. Dies gelang nun vollständig durch die Thatsache: Damit $y = f(x, a)$ ein Integral von (2) wird, das für $x = x_0$ den Wert a annimmt, ist notwendig und hinreichend, dass die Transformationen:

$$y = f(x, a) \qquad (3.)$$

eine eingliedrige continuierliche Gruppe bilden, beider Parameter und Argument vertauschbar sind. War somit unser Problem als identisch mit dem der Gruppentheorie erkannt worden, alle algebraischen Gruppen der genannten Art aufzustellen, so war auch andrerseits durch Kennzeichnung der allgemeinen Form des Integrals eine Basis für die functionentheoretische Behandlung von (2) gewonnen. Diese ist nämlich hier deshalb mit Schwierigkeiten verknüpft, weil die Differentialgleichung verschiebbare Verzweigungspunkte besitzt; für solche bedarf aber das Cauchysche Existenztheorem noch einer gewissen Ergänzung, von der später die

Rede sein wird; sie findet sich in der unserer Gleichung (2) adaequaten Gestalt auf Seite 21 gegeben.

War nun hiermit auch das nächste Ziel, die Lösung des obigen Problems, erreicht, so boten doch die hier nötig gewesenen gruppentheoretischen Betrachtungen auch an sich so viel Interesse, dass es nahe lag sie möglichst zu verallgemeinern. Dies ist in § 1 durch Einführung der ($\mathfrak{S}$) Gruppen geschehen, einer speziellen Klasse von Gruppen, die sich vor den übrigen durch besonders einfache Eigenschaften auszeichnet; namentlich dadurch, dass ihre Gleichungen in der canonischen Form, die sich durch Integration eines Systems von n totalen Differentialgleichungen ergeben, einfach durch Quadraturen erhalten werden können. Ihre Spezialisation zu ($\mathfrak{S}''$) Gruppen in § 2 führte zum *Abel*'schen Theorem, dem gegenüber diese eine analoge Rolle spielen, wie die Gruppe (3) einer Variablen bei der Gleichung (1). Die Spezialisation der Resultate für den Fall einer Veränderlichen bildet den § 3 und die Anwendung derselben in § 4 löst das anfangs gestellte Problem.

§ 1. Allgemeines.

Die folgenden Betrachtungen stützen sich hauptsächlich auf die Entwicklungen, die Herr *Lie* im ersten Abschnitte seiner Transformationsgruppen[1]) gegeben hat.

1. Ist in den n Gleichungen:

$$y_i = f_i \; (x_1 \ldots x_n;\; a_1 \ldots a_n) \; (i = 1 \ldots n) \qquad (1.)$$

deren Functionaldeterminante:

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right| (i, k = 1 \ldots n)$$

nicht identisch verschwindet, jedes f eine analytische Function der 2n Argumente:

$$x_1 \ldots . x_n;\; a_1 \ldots . a_n,$$

so sagt man bekanntlich, die Schar von Transformationen (1) der Variablen x in die y stellt eine — endliche continuierliche — Gruppe dar, wenn die successive Ausführung der Transformation (1) und der folgenden:

$$z_k = f_k \; (y_1 \ldots y_n,\; b_1 \ldots b_n) \; (k = 1 \ldots n) \qquad (2.)$$

wieder eine Transformation der Form (1) ergiebt, nämlich:

$$z_k = f_k \; (x_1 \ldots x_n,\; c_1 \ldots . c_n) \qquad (3.)$$

wo die c Functionen der a und b allein sind:

$$c_k = \varphi_k \; (a_1 \ldots . a_n,\; b_1 \ldots b_n) \qquad (4.)$$

Die Gleichungen (4), aufgefasst als Transformationen der Variablen a in die Veränderlichen c mit den Parametern b bilden wieder eine Gruppe, die ‚Para-

[1]) *Sophus Lie,* Theorie der Transformationsgruppen I. Leipzig 1888.

metergruppe'.[1]) Wir wollen im Folgenden solche Transformationsgruppen (1) betrachten, bei denen jede Function f ungeändert bleibt, wenn man jedes Argument x_i mit dem entsprechenden Parameter a_i vertauscht, wo also jedes f die Substitution zulässt:

$$(\mathfrak{S}) = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ a_1 \dots a_n \end{pmatrix}$$

Eine solche Gruppe heisse eine ($\mathfrak{S}$) Gruppe.

Dies vorausgesetzt ist die Gruppe (1) zunächst ngliedrig. Daher genügen die y als Functionen der a einem simultanen Systeme von n^2 partiellen Differentialgleichungen der Form:[2])

$$\frac{\partial y_i}{\partial a_k} = \sum_1^n{}_j \psi_{jk} (a_1 \dots a_n) . \xi_{ji} (y_1 \dots y_n), \text{ wobei } | \psi_{jk} | \mathrel{\not\equiv} o^{4)} \quad {\scriptstyle (i, k = 1 \dots n)} \quad {\scriptstyle (j, k = 1 \dots n)}$$

und zwischen den ξ keine Relationen der Form bestehen:

$$\sum_1^n{}_i e_i \xi_{ji} (y) \equiv o^{4)} \; (j = 1 \dots n), \text{ wobei } e = \text{Const.}$$

Zufolge der Eigenschaft ($\mathfrak{S}$) genügen daher die y auch als Functionen der Variablen x dem Systeme:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \sum_1^n{}_j \psi_{jk} (x_1 \dots x_n) . \xi_{ji} (y_1 \dots y_n) \tag{5}$$

wobei sämtliche Indices, wie immer auch im Folgenden, wenn nichts bemerkt ist, die Werte 1,2 ... n durchlaufen. Jedoch ist dieses System (5) für die Gruppenbildung nur notwendig, nicht aber auch hinreichend.[3]) Um die ψ und ξ näher zu bestimmen, benutzen wir die Gruppeneigenschaft. Setzt man nämlich auf die Transformation (1) die (2), so dass

$$\frac{\partial z_h}{\partial y_i} = \Sigma_r \psi_{ri} (y_1 \dots y_n) . \xi_{rh} (z_1 \dots z_n)$$

so besteht auch das System (3), also ist auch:

$$\frac{\partial z_h}{\partial x_k} = \Sigma_s \psi_{sk} (x_1 \dots x_n) . \xi_{sh} (z_1 \dots z_n)$$

Andrerseits gilt aber nach dem Vorigen:

$$\frac{\partial z_h}{\partial x_k} = \Sigma_i \frac{\partial z_h}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \Sigma_{i,r,j} \psi_{ri} (y_1 \dots y_n) \xi_{rh} (z_1 \dots z_n) . \psi_{jk} (x_1 \dots x_n) \xi_{ji} (y_1 \dots y_n)$$

---

[1]) *Lie*, a. a. O. Kapitel 21.

NB. Eine elementare Darstellung der *Lie*'schen Theorien ist neuerdings von *Scheffers* herausgegeben: ‚*Lie*, Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformatiouen, herausgeg. von *Scheffers*'. Leipzig 1891.

[2]) *Lie*, a. a. O. Theorem 3.

[3]) Notwendige und hinreichende Bedingungen für Gruppen mit identischer Transformation hat Herr *Schur* gegeben. Vergl. ‚*Schur*, Neue Begründung der endlichen Transformationsgruppen'. Mathematische Annalen Band XXXV.

[4]) In dieser Arbeit kommen keine Kongruenzen vor; das Zeichen $\equiv$ bedeutet lediglich die Identität, wie in den *Lie*'schen Werken.

Daher folgt durch Vergleichung:
$\Sigma_s \psi_{sk} (x_1 .. x_n). \xi_{sh} (z_1 .. z_n) = \Sigma_{i,r,j} \psi_{ri} (y_1 . y_n) \xi_{rh} (z_1 .. z_n) \psi_{jk} (x_1 .. x_n) \xi_{ji} (y_1 .. y_n)$
für beliebige x, y, z.
Also ist identisch:

$$\sum_i \psi_{ri}(y_1 .. y_n) \xi_{ji}(y_1 . . y_n) = \partial_{jr}, \text{ f. } \left| \psi_{ri} \right|_{r,i} . \left| \xi_{ji} \right|_{j,i} = 1$$

wobei ∂_{jr} 0 oder 1 ist, jenachdem j von r verschieden ist oder nicht. Daher ist das System (ψ) zu dem System (ξ) reciprok, was wir andeuten durch:

$$\psi_{ji} = \xi'_{ji}$$

Sind umgekehrt die ψ so bestimmt, so ist die Gruppeneigenschaft erfüllt, vorausgesetzt, dass das System (5) überhaupt gemeinsame Lösungen besitzt. Die Gleichungen (5) erhalten die Form:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \Sigma_j \xi'_{jk} (x_1 .. x_n). \quad \xi_{ji} (y_1 .. y_n)$$

oder, nach den ξ' (x) aufgelöst:

$$\xi'_{jk} (x_1 .. x_n) = \Sigma_i \xi'_{ji} (y_1 . y_n) \frac{\partial y_i}{\partial x_k}, \ | \xi'_{ji} | \mathrel{\#} 0 \qquad (6.)$$

Dieses System ist von selbst erfüllt, wenn $y_i = x_i$ ist. Also enthält jede Gruppe, welche die Substitution ($\mathfrak{S}$) zulässt, die identische Transformation.

Ein dem Systeme (6) von n^2 partiellen Differentialgleichungen aequivalentes von n totalen ergiebt sich durch Multiplication von (6) mit dx_k und Summation über alle k, nämlich:

$$\sum_k \xi'_{jk} (x_1 ... x_n) dx_k = \sum_i \xi'_{ji} (y_1 ... y_n) dy_i \quad | \xi'_{ji} | \mathrel{\#} 0 \qquad (7.)$$

so dass also für jede ($\mathfrak{S}$) Gruppe n unabhängige Differentialausdrücke existieren:

$$\Sigma_k \xi'_{jk} (x_1 .. x_n) dx_k, \qquad (7_a.)$$

welche die Gruppe (1) gestatten. Da die Gleichungen (7) in Bezug auf die x und y vollkommen gleichberechtigt sind, so enthält die Gruppe auch die inverse Transformation. Ist ferner F eine beliebige Function von $x_1 .. x_n$, so ist:

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_k} = \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial y_i} \xi'_{jk} (x_1 .. x_n). \ \xi_{ji} (y_1 .. y_n)$$

oder:

$$\sum_k \xi_{hk} (x_1 .. x_n) \frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum_{i,j,k} \xi_{hk} (x_1 ... x_n) \xi'_{jk} (x_1 ... x_n). \ \xi_{ji} (y_1 .. y_n). \frac{\partial F}{\partial y_i}$$

$$= \sum_{i,j} \partial_{hj} \xi_{ji} (y_1 .. y_n). \ \frac{\partial F}{\partial y_i} = \sum_i \xi_{hi} (y_1 .. y_n) \frac{\partial F}{\partial y_i} \text{ [1]} \qquad (8.)$$

für jede Function F von x_1 bis x_n.

Natürlich behalten diese Gleichungen ihre Geltung sämtlich, wenn man die a an Stelle der x einführt. Hätte man die y zugleich als Functionen der x und a betrachtet, so wäre an Stelle des Systems (7) das folgende getreten:

[1]) Vergl. auch *Lie*, a. a. O. Theorem 5.

$$\sum_k \xi'_{jk}(y_1 \,.\,.\, y_n)\, dy_k = \sum_k [\xi'_{jk}(x_1 \,.\,.\, x_n)\, dx_k + \xi'_{jk}(a_1 \,.\,.\, a_n)\, da_k] \qquad (7_b.)$$

Denkt man sich links vermöge (1) in den ξ die y durch die x ersetzt, so erhält man ein System der Form:

$$\sum_k \eta'_{jk}(x_1 \,.\,.\, x_n;\; a_1 \,.\,.\, a_n)\, dy_k = \Sigma_k [\xi'_{jk}(x_1 \,.\,.\, x_n)\, dx_k + \xi'_{jk}(a_1 \,.\,.\, a_n)\, da_k]$$

Jede dieser Gleichungen stellt eine Gleichung des *Pfaff*schen Problems vor. Dieses ist aber im Allgemeinen vollkommen bestimmt; das heisst, wenn nicht Ausnahmefälle eintreten, definiert schon 1 dieser Gleichungen die y als Functionen der x und a im Wesentlichen. Die Ausnahmefälle sind aber dadurch charakterisiert, dass die Determinante:

$$\left| \frac{\partial \xi'_{ji}(x_1 \,.\,.\, x_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi'_{jk}(x_1 \,.\,.\, x_n)}{\partial x_i} \right| \quad (i, k = 1 \,.\,.\,.\, n)$$

identisch verschwindet [1]). In unserem Falle nun, wo n solcher Gleichungen miteinander bestehen sollen, ist demnach zu vermuten, dass die Matrix:

$$\left(\frac{\partial \xi'_{ji}}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi'_{jk}}{\partial x_i} \right) \quad (i, k = 1 \,.\,.\,.\, n)$$

vom Range [2]) 1, wenn nicht sogar 0 ist; d. h. dass jedes Einzelne ihrer Elemente verschwindet und für jede Combination (j, i, k) die Gleichung besteht:

$$\frac{\partial \xi'_{ji}(x_1 \,.\,.\, x_n)}{\partial x_k} = \frac{\partial \xi'_{jk}(x_1 \,.\,.\,.\, x_n)}{\partial x_i}$$

2. Unsere Vermutung wird sich wirklich bestätigen, wenn wir auf die infinitesimalen Transformationen der Gruppe näher eingegangen sein werden. Da die Gruppe n gliedrig ist, so besitzt sie n unabhängige infinitesimale Transformationen, von denen sie erzeugt wird; solche sind z. B.:

$$U_j(F) = \Sigma_k\, \xi_{jk}(x_1 \,.\,.\, x_n)\, \frac{\partial F}{\partial x_k}$$

Die der Parametergruppe sind [3]):

$$A_j(F) = \Sigma_k\, \xi_{jk}(a_1 \,.\,.\, a_n)\, \frac{\partial F}{\partial a_k}$$

also fällt die letztere mit der Gruppe (1) zusammen und die Functionen φ in (4) sind die f, so dass die endlichen Gleichungen der Parametergruppe die Form haben:

$$c_i = f_i(a_1 \,.\,.\, a_n,\, b_1 \,.\,.\, b_n)$$

Da die f aber alle ungeändert bleiben bei der Substitution:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & .\,. & a_n \\ b_1 & b_2 & .\,. & b_n \end{pmatrix}$$

so folgt, dass die Gruppe in den x lauter vertauschbare Transformationen besitzt. Wir können daher unsere ($\mathfrak{S}$) Gruppen auch definieren als diejenigen vertausch-

[1]) Vergl. z. B. *Clebsch*, Über das *Pfaff*sche Problem, Crelle's Journal B. 60, 61.

[2]) Über diesen Begriff siehe *Kronecker* Über näherungsweise ganz zahlige Auflösung linearer Gleichungen. Sitzungsberichte 1884. Seite 1192

[3]) *Lie*, a. a. O. Theorem 72.

baren Gruppen, deren Parametergruppe mit der Gruppe der Variablen zusammenfällt. Daher bestehen die Relationen:[1])

$$(U_i\, U_k) = 0$$

das heisst für jede Function F ist:

$$U_i\, U_k\, (F) - U_k\, U_i\, (F) \equiv 0$$

Deshalb sind in den Gleichungen:

$$(U_i\, U_k) = \Sigma\, c_{iks}\, U_s,[2])$$

die deshalb bestehen, weil die U_s eine Gruppe erzeugen, sämtliche Constanten c_{iks} gleich Null, da ja die U_s von einander unabhängig sind. Hiernach ist die ‚Zusammensetzung' unserer (𝔖) Gruppe durch die n^3 Gleichungen bestimmt.

$$c_{iks} = 0 \qquad (9.)$$

Umgekehrt, hat eine Gruppe diese Zusammensetzung, bestehen also die n^3 Gleichungen (9) und fällt die Parametergruppe mit ihr zusammen, so ist sie eine (𝔖) Gruppe.

3. Ehe wir die bisherigen Resultate weiter entwickeln, wollen wir zeigen, wie aus den Gleichungen (9) die Ende 2. angegebene Vermutung erwiesen werden kann[3]). Es ist nämlich:

$$(U_i\, U_k)\, F = \sum_{h,\nu} \left(\xi_{ih} \frac{\partial \xi_{k\nu}}{\partial x_h} - \xi_{kh} \frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial x_h} \right) \frac{\partial F}{\partial x_\nu}$$

und, da für jede Gruppe:

$$(U_i\, U_k) = \Sigma_s\, c_{iks}\, U_s,$$

so folgt allgemein, dass:

$$\Sigma_h \left(\xi_{ih} \frac{\partial \xi_{k\nu}}{\partial x_h} - \xi_{kh} \frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial x_h} \right) = \Sigma_s\, c_{iks}\, \xi_{s\nu}$$

Diese Relationen gelten für die ξ einer jeden Gruppe, in unserem Falle nehmen sie die einfache Gestalt an:

$$\Sigma_h \left(\xi_{ih} \frac{\partial \xi_{k\nu}}{\partial x_h} - \xi_{kh} \frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial x_h} \right) = 0 \qquad (\dagger)$$

In diese Gleichungen führen wir statt der ξ die reciproken Elemente ξ' ein und erhalten dadurch unsere gewünschten Relationen.

Multiplicirt man zunächst die Gleichung:

$$\Sigma_h\, \xi_{ih} \frac{\partial \xi_{k\nu}}{\partial x_h} = \Sigma_h\, \xi_{kh} \frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial x_h}$$

mit $\xi'_{il}\ \xi'_{km}$ und summiert über alle i und k, so folgt:

$$\sum_{h,i,k} \xi_{ih}\, \xi'_{il}\ \xi'_{km} \frac{\partial \xi_{k\nu}}{\partial x_h} = \sum_{h,i,k} \xi'_{km}\, \xi'_{il}\, \xi_{kh} \frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial x_h}$$

---

[1]) *Lie*, a. a. O. Theorem 46.

[2]) *Lie*, a. a. O. Kapitel 9.

[3]) Der Zusammenhang zwischen den Integrabilitätsbedingungen des Differentialgleichungssystemes und der Zusammensetzung ist auch im allgemeinen vorhanden und von *Schur* hervorgehoben worden. *Schur* a. a. O.

oder:

$$\sum_k \xi'_{km} \frac{\partial \xi_{k\nu}}{\partial x_l} = \sum_{h,i,k} \xi'_{km} \xi'_{il} \xi_{kh} \frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial x_h} \qquad (*)$$

Die Differentiation der Identitäten:

$$\sum_k \xi'_{ki} \xi_{kr} = \delta_{ir}$$

ergiebt aber:

$$\sum_k \frac{\partial \xi'_{ki}}{\partial x_s} \xi_{kr} = - \sum_k \xi'_{ki} \frac{\partial \xi_{kr}}{\partial x_s}$$

Daher nimmt die Gleichung (*) die Form an:

$$\sum_k \xi_{k\nu} \frac{\partial \xi'_{km}}{\partial x_l} = - \sum_{h,i,k} \xi'_{km} \xi'_{il} \xi_{kh} \frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial x_h}$$

Vertauscht man in dieser Gleichung m und l, so folgt:

$$\sum_k \xi_{k\nu} \frac{\partial \xi'_{kl}}{\partial x_m} = - \sum_{h,i,k} \xi'_{kl} \xi'_{im} \xi_{kh} \frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial x_h} = - \sum_{h,k,i} \xi'_{il} \xi'_{km} \xi_{ih} \frac{\partial \xi_{k\nu}}{\partial x_h}$$

Daher ergiebt sich durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen:

$$\sum_k \left(\frac{\partial \xi'_{kl}}{\partial x_m} - \frac{\partial \xi'_{km}}{\partial x_l} \right) \xi_{k\nu} = - \sum_{i,k} \xi'_{km} \xi'_{il} \cdot \sum_h \left(\xi_{ih} \frac{\partial \xi_{k\nu}}{\partial x_h} - \xi_{kh} \frac{\partial \xi_{i\nu}}{\partial x_h} \right)$$

Nach (†) ist die rechte Seite 0, also folgt für beliebige l, m, ν:

$$\sum_k \left(\frac{\partial \xi'_{kl}}{\partial x_m} - \frac{\partial \xi'_{km}}{\partial x_l} \right) \xi_{k\nu} = 0$$

Lässt man hierin l und m fest, während ν von 1 bis n geht, so erhält man n Gleichungen, welche die n Grössen $\frac{\partial \xi'_{kl}}{\partial x_m} - \frac{\partial \xi'_{km}}{\partial x_l}$ $(k = 1 \ldots n)$ linear und homogen enthalten, ohne dass die Determinante der Coefficienten $|\xi_{k\nu}|$ $(k, \nu = 1 \ldots n)$ identisch verschwindet; es folgt also für jede Combination (k, l, m):

$$\frac{\partial \xi'_{kl}}{\partial x_m} - \frac{\partial \xi'_{km}}{\partial x_l} = 0 \qquad (10.)$$

wie behauptet war.

4. Die Relationen (10), welche eine Folge der Gleichungen (9) sind, gelten für beliebige Gruppen, deren Transformationen untereinander vertauschbar sind. Fügen wir noch die Bedingung hinzu, dass die Gruppe mit ihrer Parametergruppe zusammenfällt, so erhalten wir unsere ($\mathfrak{S}$) Gruppe und es bestehen die n Gleichungen:

$$\sum_k \xi'_{jk} (y_1 \ldots y_n)\, dy_k = \sum_k \xi'_{jk} (x_1 \ldots x_n)\, dx_k \quad |\xi'_{jk}|_{j,k} \neq 0 \qquad (7)$$

Dass diese n Gleichungen mit einander in Einklang stehen, ist durch die Relationen (10) gesichert:

$$\frac{\partial \xi'_{jk}}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi'_{ji}}{\partial x_k} \qquad (10^a)$$

Diese besagen aber, dass jede Seite in (7) das vollständige Differential einer Function der n Argumente ist. Wir setzen daher:

$$\sum_k \xi'_{jk} (x_1 \dots x_n)\ dx_k = d\,F_j\ (x_1 \dots x_n) \qquad \text{(F)}$$

Dann werden die Gleichungen (7_b):

$$d\,F_j\ (y_1 \dots y_n) = d\,F_j\ (x_1 \dots x_n) + d\,F_j\ (a_1 \dots a_n)$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$F_j\ (y_1 \dots y_n) = F_j\ (x_1 \dots x_n) + F_j\ (a_1 \dots a_n) + C_j$$

wo die C_j beliebige Constante sind, die aber passend zu wählen sind, wenn die hier erhaltenen y mit den in (1) definierten übereinstimmen sollen. Da aber die F_j laut (F) selbst nur bis auf additive Constanten bestimmt sind, so können wir annehmen, dass sie so gewählt sind, dass für $C_1 = C_2 = \dots = C_n = o$ die erwähnte Übereinstimmung stattfindet. Hiernach sind $y_1 \dots y_n$ in (1) ein System von Integralen, so dass für $x_i = x_i^0$ $y_i = a_i$ wird, wenn nämlich:

$$a^j = f_i\ (x_1^0 \dots x_n^0,\ a_1 \dots a_n)$$

oder:

$$x_i = f_i\ (x_1 \dots x_n,\ a^0_1 \dots x_n^0)$$

d. h., wenn $x_1^0 \dots x_n^0$ die Parameter der identischen Substitution sind. Die Existenz dieser so wie der inversen Transformation ist ja schon oben erkannt worden. Sind $a^1_1 \dots a^1_n$ die Parameter der inversen Transformation, so bestimmen sie sich aus:

$$x^0_i = f_i\ (a_1 \dots a_{n1}\ a'_1 \dots a'_n).$$

Somit sind wir einfach durch Quadraturen infolge der Thatsache (10) auf die endlichen Gleichungen der $(\mathfrak{S})$ Gruppe in einer anderen sehr bemerkenswerten Form gelangt, nämlich:

$$F_j\ (y_1 \dots y_n) = F_j\ (x_1 \dots x_n) + F_j\ (a_1 \dots a_n), \qquad \left| \frac{\partial F_j}{\partial x_k} \right|_{j,k = 1 \dots n} \mathrel{\overline{\underline{|}}} o \qquad (11)$$

5. Macht man die Substitutionen:

$$F_j\ (a_1 \dots a_n) = \mathfrak{a}_j,\ F_j\ (x_1 \dots x_n) = \mathfrak{x}_j,\ F_j\ (y_1 \dots y_n) = \mathfrak{y}_j \qquad (12)$$

so geht die $(\mathfrak{S})$ Gruppe in die folgende ihr ähnliche über:

$$\mathfrak{y}_j = \mathfrak{x}_j + \mathfrak{a}_j. \qquad (13)$$

welche eine Gruppe von Translationen darstellt und selber eine $(\mathfrak{S})$ Gruppe ist. Daher sind alle $(\mathfrak{S})$ Gruppen unter einander ähnlich. Die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (13) sind:

$$U_j\ F = \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{x}_j}$$

Sie sind natürlich auch untereinander vertauschbar, was evident ist.

Zu bemerken ist noch, dass die Parametergruppe irgend einer Gruppe mit lauter vertauschbaren Transformationen eine $(\mathfrak{S})$ Gruppe ist. Die adjungierte Gruppe schrumpft natürlich in unserem Falle auf die identische Transformation zusammen:

$$e'_j = e_j.$$

Was endlich die Untergruppen anbetrifft, so werden die eingliedrigen erzeugt durch die $\binom{n}{m}$ Systeme von infinitesimalen Transformationen:

$$U_{i_1} \ldots U_{i_m}$$

wo $(i_1 \ldots i_m)$ irgend eine Combination von m Elementen aus der Reihe $1 \ldots n$ bedeutet. Die endlichen Gleichungen einer mgliedrigen Untergruppe von (13) sind von der Form:

$$\mathfrak{y}_i = \mathfrak{x}_i + (\lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_m t_m)$$

Bei ihr sind also je $m + 1$ der Parameter $\mathfrak{a}$ durch eine homogene lineare Relation mit constanten Coefficienten verbunden. Es giebt also ∞^{m-1} mgliedrige Untergruppen. Die ursprünglichen Gleichungen in den y, x, a haben die mgliedrigen Untergruppen:

$$F_i(y_1 \ldots y_n) = F_i(x_1 \ldots x_n) + \lambda_1 F_1(\tau \ldots \tau_n) + \ldots + \lambda_m F_m(\tau_1 \ldots \tau_n)$$

Bei ihr sind also die n Parameter a so beschaffen, dass die Functionalmatrix:

$$\left(\frac{\partial F_i(a_1 \ldots a_n)}{\partial a_k}\right) \quad (i, k = 1 \ldots n)$$

vom Range m ist.

6. Fragen wir nach den bei unserer Gruppe (1) invarianten Mannigfaltigkeiten, so ist klar, dass einer solchen immer eine invariante Mannigfaltigkeit der ähnlichen Gruppe entspricht:

$$\mathfrak{y}_i = \mathfrak{x}_i + \mathfrak{a}_i \qquad (\mathfrak{G})$$

Unsere Gruppe $(\mathfrak{G})$ ist einfach transitiv und der Inbegriff aller Transformationen derselben erfüllt gerade die nfache Mannigfaltigkeit; in dieser giebt es also keine aus Punkten von allgemeiner Lage zusammengesetzten Gebilde, die bei allen Transformationen der Gruppe invariant bleiben.

Haben die Punkte aber eine spezielle Lage, so können sehr wohl solche auftreten; diese sind bis jetzt wenig betrachtet worden, sie sind es aber gerade, die für die Integration und überhaupt das Studium der Differentialgleichungssysteme von Wichtigkeit sind Um sie zu finden, gehen wir von der Gruppe $(\mathfrak{G})$ aus.

Die ngliedrige Gruppe der nfachen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_n$:

$$\mathfrak{y}_i = \mathfrak{x}_i + \mathfrak{a}_i \; (i = 1 \ldots n)$$

transformiert jeden Punkt $(\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_n)$ im Endlichen in einen beliebigen anderen $(\mathfrak{y}_1 \ldots \mathfrak{y}_n)$. Daher existieren keine invarianten Gebilde oder Scharen von solchen im Endlichen. Die n Gleichungen dagegen:

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2 = \ldots = \mathfrak{x}_n = \infty$$

bestimmen einen unendlich fernen Punkt als den einzigen invarianten Punkt der Gruppe. Irgend $n-1$ der $\mathfrak{x} = \infty$ gesetzt, das letzte beliebig, z. B.:

$$\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2 = \ldots = \mathfrak{x}_{n-1} = \infty, \; \mathfrak{x}_n$$

bestimmen eine ebene invariante 1fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_1$; diese enthält eine Schar von Punkten, die als solche invariant bleibt, u. s. w. Irgend $n-h$ unendlich grosse $\mathfrak{x}$:

$$\mathfrak{x}_1 = \ldots = \mathfrak{x}_{n-h} = \infty; \; \mathfrak{x}_{n-h+1} \ldots \mathfrak{x}_n$$

bilden eine invariante ebene hfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_h$, welche eine invariante Schar $h-1$ facher Mannigfaltigkeiten enthält. Alle Invarianten niederer Stufe und Scharen von solchen enthält die unendlich ferne ebene $\mathfrak{M}_{n-1}$.

Nunmehr lassen sich die speziellen Invarianten unserer Gruppe (G) ganz präcis angeben. Sie liess sich ja auf die Form bringen:

$$F_i(y_1 \dots y_n) = F_i(x_1 \dots x_n) + F_i(a_1 \dots a_n) \qquad (G)$$

und hing durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{y}_i = F_i(y_1 \dots y_n),\ \mathfrak{x}_i = F_i(x_1 \dots x_n),\ \mathfrak{a}_i = F_i(a_1 \dots a_n)$$

mit der Gruppe ($\mathfrak{G}$) zusammen. Die neuen Invarianten sind nun einfach die aus dem letzten Gleichungssysteme sich ergebenden Abbildungen der früheren. Es existieren daher in der Gruppe (G) keine invarianten Gebilde, für die nicht eines der F unendlich würde; ist dies aber der Fall, so treten sicher Invarianten auf. Irgend n—h Gleichungen, welche einige der $F = \infty$ setzen, z. B.:

$$F_1(x_1 \dots x_n) = \infty, \dots\dots, F_{n-h}(x_1 \dots x_n) = \infty$$

bestimmen diejenigen Invarianten, welche Abbildungen der entsprechenden $\mathfrak{M}_h$ sind. Natürlich können diese, da das Gleichungssystem gemeinsame Lösungen 0ter bis $n-1^{ter}$ Stufe enthalten kann, invariante Mannigfaltigkeiten irgend einer Stufe sein: $M^h_o, \dots M^h_{n-1}$. Indem man auf diese Weise die Abbildungen der invarianten $M_o \dots M_{n-1}$ sucht, findet man alle speziellen Invarianten der Gruppe (G), wie verlangt wurde.

Um die vorstehenden Betrachtungen nicht zu weit auszudehnen, werden wir auf die Invarianten der Untergruppen nicht weiter eingehen.

Wir wollen die wichtigsten Ergebnisse dieses Abschnittes in folgendem Theoreme zusammenfassen:

Theorem I. „Stellen die Transformationen:

$$y_i = f_i(x_1 \dots x_n, a_1 \dots a_n)\ (i = 1 \dots n)\ \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\ (i, k = 1 \dots n) \neq 0, \quad (f) = (1)$$

eine Gruppe (G) dar und bleibt jedes f ungeändert bei der Substitution:

$$(\mathfrak{S}) = \begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ a_1 \dots a_n \end{pmatrix},$$

so ist (G) ngliedrig, enthält die identische und inverse Transformation und ist definiert als ein System von Integralen der n^2 partiellen Differentialgleichungen:

$$\xi'_{jk}(x_1 \dots x_n) = \Sigma_i\, \xi'_{ji}(y_1 \dots y_n) \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \quad |\xi'_{ji}|\ (j, i = 1 \dots n) \neq 0 \qquad (\Delta) = (6)$$

oder des aequivalenten von n totalen:

$$\Sigma_k\, \xi'_{jk}(x_1 \dots x_n)\, dx_k = \Sigma_i\, \xi'_{ji}(y_1 \dots y_n)\, dy_i\,. \qquad (D) = (7)$$

Sollen $x^0_1 \dots x^0_n$ die Parameter der identischen Transformation sein — sie können ja im allgemeinen beliebig sein —, so sind die Anfangsbedingungen der Art, dass für $x_i = x_i^0$ $y_i = a_i$ wird. Die ξ' genügen ferner den Bedingungen:

$$\frac{\partial \xi'_{ji}}{\partial x_k} = \frac{\partial \xi'_{jk}}{\partial x_i}, \qquad (d) = (10^a)$$

so dass sich durch einfache Quadraturen die endlichen Gleichungen der Gruppe (G) in der canonischen Form ergeben:

$$F_j(y_1 \dots y_n) = F_j(x_1 \dots x_n) + F_j(a_1 \dots a_n),\ F_j(x_1^0 \dots x_n^0) = 0 \qquad (F) = (11)$$

Die Gruppe ist daher ähnlich mit der folgenden:

$$\mathfrak{y}_j = \mathfrak{x}_j + \mathfrak{a}_j \qquad (\mathfrak{G}) = (13)$$

und alle ($\mathfrak{S}$)-Gruppen sind einander ähnlich. Die Transformationen jeder ($\mathfrak{S}$)-Gruppe sind vertauschbar, diese ist ihre eigene Parametergruppe und die Parametergruppe jeder Gruppe mit vertauschbaren Transformationen ist eine ($\mathfrak{S}$)-Gruppe'.

Die Invarianteneigenschaften sind schon an Ort und Stelle so kurz zusammengefasst, dass eine Wiederholung hier wohl überflüssig ist.

§ 2. Spezialisationen. — Das Abelsche Theorem.

1. Wir setzten zunächst von unserer ($\mathfrak{S}$)-Gruppe voraus, dass in:

$$y_i = f_i (x_1 \ldots x_n ; a_1 \ldots a_n) \qquad (f')$$

jedes f ungeändert bleibt, wenn man die x unter einander vertauscht. Dann gilt natürlich Gleiches bei Vertauschungen der a untereinander. Eine solche Gruppe, welche also immer eine ($\mathfrak{S}$)-Gruppe ist, heisse eine ($\mathfrak{S}'$)-Gruppe. Die Parametergruppe einer ($\mathfrak{S}'$)-Gruppe ist ebenfalls eine ($\mathfrak{S}'$)-Gruppe. In der canonischen Form (F) werden die F_j symmetrische Functionen ihrer Argumente; sie seien daher mit S_j bezeichnet. Dann haben die Gleichungen (F) die Form:

$$S_j (y_1 \ldots y_n) = S_j (x_1 \ldots x_n) + S_j (a_1 \ldots a_n) \quad \left| \frac{\partial S_j (x_1 \ldots x_n)}{\partial x_k} \right| (j, k = 1 \ldots n) \neq 0, \quad (F')$$

Die Gleichungen ($\mathfrak{G}$) stellen jedoch keine ($\mathfrak{S}'$) Gruppe mehr dar.

2. Noch spezieller ist die Annahme, dass die f überhaupt bei allen Vertauschungen der 2n Argumente:

$$x_1 \ldots x_n, a_1 \ldots a_n$$

unter einander ungeändert bleiben. Dann nehmen die symmetrischen Functionen S in (F') noch speziellere Formen an.

Es bleiben ja nun die y ungeändert, also auch die linken Seiten in (F), wenn man z. B. x_2 mit a_2, ... x_n mit a_n vertauscht. Dies ergiebt:

$$S_j (x_1 \ldots x_n) + S_j (a_1 \ldots a_n) = S_j (x_1 ; a_2 \ldots a_n) + S_j (a_1 ; x_2 \ldots x_n)$$

oder:

$$S_j (x_1 ; x_2 \ldots x_n) - S_j (a_1 ; x_2 \ldots x_n) = S_j (x_1 ; a_2 \ldots a_n) - S_j (a_1 ; a_2 \ldots a_n)$$

Entwickelt man beide Seiten dieser Gleichung nach Potenzen von $x_1 - a_1$ und bezeichnet die Ableitungen der S nach dem ersten Argument durch Accente, so folgt:

$$S'_j (a_1 ; x_2 \ldots x_n) . (x_1 - a_1) + \ldots = S'_j (a_1 ; a_2 \ldots a_n) . (x_1 - a_1) + \ldots .$$

also zeigt die Vergleichung der linearen Potenzen, dass:

$$S'_j (a_1 ; x_2 \ldots x_n) = S'_j (a_1 ; a_2 \ldots a_n)$$

Da $x_2 \ldots x_n$, $a_2 \ldots a_n$ von einander unabhängige Variable sind, so heisst dies, S' ist unabhängig vom 2ten bis n^{ten} Argument, oder:

$$S'_j (x_1, x_2 \ldots x_n) = \psi_j \, x_1$$

eine Function von x_1 allein. Da S_j in allen Argumenten symmetrisch ist, so folgt durch Integration:

$$S_j(x_1 \ldots x_n) = \Phi_j x_1 + \Phi_j x_2 + \ldots + \Phi_j x_n, \text{ wo } \Phi_j x = \int_{x^0}^{x} \psi_j x \, dx$$

Die canonische Form unserer neuen Gruppe, welche $(\mathfrak{S}'')$-Gruppe heissen möge, ist also:

$$\Sigma_k \Phi_j y_k = \Sigma_k [\Phi_j x_k + \Phi_j a_k] \qquad (F'')$$

wo die Φ_j von einander unabhängig sind oder:

$$e_1 \Phi_1 x + e_2 \Phi_2 x + \ldots + e_n \Phi_n x \mathrel{\#} o$$

Das System erhält die Form:

$$\Sigma_k \psi_i y_k dy_k = \Sigma_k \psi_j x_k dx_k, \qquad (D'')$$

die ψ genügen dabei der Bedingung:

$$e_1 \psi_1 x + e_2 \psi_2 x + \ldots + e_n \psi_n x \mathrel{\#} o,$$

bilden also ein Fundamentalsystem.

Natürlich ist die $(\mathfrak{S}'')$-Gruppe wieder ähnlich mit der $(\mathfrak{S})$ Gruppe von Translationen:

$$\mathfrak{y}_i = \mathfrak{x}_i + \mathfrak{a}_i \qquad (\mathfrak{G}'')$$

3. Wir kommen jetzt zu den Beziehungen zwischen den $(\mathfrak{S}'')$ Gruppen und dem *Abel*'schen Theoreme.

Es seien die $\psi_j x$ $(j = 1 \ldots n)$ linear unabhängige, rationale Functionen von x und einer Grösse s; diese sei Wurzel einer algebraischen Gleichung:

$$G(s, x) = o$$

vom Geschlechte ϱ. Die Zahl n der Variablen wählen wir gleich ϱ. Sind nun ferner die ψ so beschaffen, dass die Φ *Abel*'sche Integrale erster Gattung werden so lehrt das *Abel*'sche Theorem, dass die ϱ Gleichungen:

$$\sum_1^{\varrho}{}_k \Phi_j y_k = \sum_1^{\varrho}{}_k [\Phi_j x_k + \Phi_j a_k] \; (j = 1 \ldots \varrho) \qquad (\Phi)$$

die y als Functionen der 2ϱ Veränderlichen x, a so bestimmen, dass die

$$y_i = f_i(x_1 \ldots x_\varrho, a_1 \ldots a_\varrho) \qquad (f'')$$

algebraische Functionen werden, nämlich die Wurzeln einer algebraischen Gleichung, deren Rationalitätsbereich[1]) sich aus dem der ψ_j und dem von G zusammensetzt. Andrerseits sind die Fälle, wo die ψ die oben angegebene Beschaffenheit haben, die einzigen, in welchen die Gleichungen (f'') algebraisch sind.

Nun wissen wir aber die Transformationen (f'') bilden eine $(\mathfrak{S}'')$ Gruppe; demnach ist das Problem alle algebraischen $(\mathfrak{S}')$-Gruppen aufzustellen dem vollständig aequivalent, diejenigen algebraischen Functionen y aufzustellen, welche das *Abel*sche Theorem in der Form (Φ) definiert.

In dieser Gestalt haftet allerdings dem *Abel*schen Theoreme noch die Beschränkung an, dass die rechte Seite von (Φ) gerade 2ϱ Veränderliche enthält, während doch die Zahl der Summanden nur grösser als ϱ zu sein braucht, sonst aber beliebig sein kann. Die Beschränkung ist aber unwesentlich; in der That, ist die Anzahl der Variablen nicht 2ϱ, sondern σ, so fügen wir zu ihnen noch $2\varrho - \sigma$ x^0 als Veränderliche hinzu, wobei:

---

[1]) Vergl. zu diesem Begriff: *Kronecker*, Festschrift, Teil I. Einleitung.

$$\Phi_j\, x^0_{\sigma+1} + \Phi_j\, x^0_{2\varrho} = 0$$

Die Erfüllbarkeit dieses System erfordert allerdings, dass $\varrho > \sigma$, aber jedenfalls sieht man, dass auf diese Weise, indem man das Verfahren wiederholt, die nötigen 2ϱ Variablen zur Herstellung des Systemes (Φ) erhält. Ist aber die Anzahl der Summanden grösser als 2ϱ, so können wir es wieder dahin bringen, dass sie ein Vielfaches von ϱ ist. Auf solche Typen gelangt man aber durch Iteration der f Functionen. Ist z. B.:

$$\Sigma_k\, \Phi_j\, y_k = \Sigma_k\, [\Phi_j\, x_k + \Phi_j\, a_k + \Phi_j\, b_k],$$

so wird einfach:

$$y_i = f_i\,(x_1 \ldots x_\varrho,\ f,\ (a_1 \ldots a_\varrho,\ b_1 \ldots b_\varrho), \ldots f_\varrho\,(a_1 \ldots a_\varrho,\ b_1 \ldots b_\varrho))$$

Wir sehen also:

Theorem 2. ‚Die Aufstellung aller algebraischen ($\mathfrak{S}''$) Gruppen und die Darstellung aller algebraischen Functionen y_i, welchem beim *Abel*schen Theorem auftreten, sind aequivalente Probleme; eines durch das andere gelöst. Das zweite Problem hat *Abel* methodisch schon gelöst.‘ [1])

Für den Fall n = 1 werden die in § 4 folgenden ‚Anwendungen‘ auch die explicite Darstellung aller ($\mathfrak{S}''$) Gruppen geben und so zu den *Weierstrass*'schen Resultaten gelangen.

§ 3. $n = 1.\quad \dfrac{dy}{\varphi y} - \dfrac{dx}{\varphi x} = 0.$

1. In dem Falle n = 1 fallen die ($\mathfrak{S}$)-, ($\mathfrak{S}'$)-, ($\mathfrak{S}''$)-Gruppen zusammen. Die Transformation:

$$y = f\,(x, a) \tag{1}$$

stellt in diesem Falle eine eingliedrige Gruppe dar, bei der Parameter und Argument vertauschbar sind. Das System von $n^2 = 1$ partiellen Differentialgleichungen (Δ) sowohl als das von n = 1 totalen (D) reduziert sich auf die eine Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi y}{\varphi x}, \tag{2}$$

welche aus (D) hervorgeht, wenn man setzt:

$$\psi z = \frac{1}{\varphi z}$$

Das System 7^b wird dagegen:

$$\frac{dy}{\varphi y} = \frac{dx}{\varphi x} + \frac{da}{\varphi a} \tag{3}$$

Integriert man (2) so, dass für den nicht singulären Punkt $x = x_0$ $y = a$ wird, so erhält man die canonische Form für (1):

[1]) V. z. B. *Abel*. Oeuvres complètes her. v. *Sylow* u. *Lie* II. X. ‚Sur la comparaison des fonctions transcendantes‘, Seite 59 f.

$$\Phi y = \Phi x + \Phi a, \text{ wobei } \Phi z = \int_{x_0}^{z} \frac{dz}{\varphi z} \qquad (4)$$

Das Theorem in § 1 erhält für unseren Fall folgende Spezialgestalt:

Theorem 3. ‚Stellen die Transformationen (1) eine eingliedrige Gruppe dar, bei der Parameter und Argument vertauschbar sind, so enthält diese die identische und inverse Transformation. Ist x_0 der Parameter der identischen Transformation, so ist y dasjenige Integral von (2), welches für $x = x_0$ den Wert a annimmt. Umgekehrt bestimmt jedes Integral y von (2), das für irgend eine nicht singuläre Stelle $x = x_0$ den Wert a annimmt, eine Transformation $y = f(x, a)$, welche eine eingliedrige (𝔖) Gruppe definiert. Die canonische Form der (𝔖) Gruppe ist (4), sie ist daher ähnlich mit der Translationsgruppe:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \mathfrak{a} \qquad (5)$$

Die Gruppe wird erzeugt von der infinitesimalen Transformation:

$$Uf = \varphi x . \frac{\partial f}{\partial x},$$

sie ist ihre eigene Parametergruppe und ihre Transformationen sind vertauschbar.‘

Zusatz. Besonders wichtig ist für uns hiervon, dass die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $y = f(x, a)$ ein Integral von (2) ist[1], darin besteht, dass die Transformation $y = f(x, a)$ eine eingliedrige Gruppe definiert, bei der Parameter und Argument vertauschbar sind.

Demnach ist die Aufgabe, alle Functionen y zu finden, welche einer Gleichung (4) genügen, identisch mit der, alle solchen Gruppen (1) aufzustellen.

Um Missverständnisse zu vermeiden, wollen wir noch hinzufügen, dass x_0 insofern der Parameter der identischen Transformation ist, als es 1 Wert von a ist, für den

$$x \quad f(x, a)$$

wird. Es kann aber sehr wohl noch mehr solche Werte geben. In der That braucht man ja nur ε aus der Gleichung zu bestimmen:

$$\Phi \varepsilon = 0, \qquad (6)$$

dann wird

$$x \quad f(x, \varepsilon) \qquad (7)$$

Diese Werte ε in (6) sind aber offenbar die einzigen, für welche (7) erfüllt ist.

Die inverse Transformation ist:

$$x = g(y, a) = f(y, a')$$

wenn:

$$f(a, a') = x_0;$$

denn aus

$$\Phi y = \Phi x + \Phi a$$

folgt:

$$\Phi x = \Phi y - \Phi a = \Phi y + \Phi a', \text{ wo } \Phi a + \Phi a' = 0.$$

[1]) Das natürlich symmetrisch in x und a ist.

2. Von besonderem Interesse ist die Bemerkung, dass wir unsere (𝔖)-Gruppe auch noch durch eine andere Eigenschaft hätten definieren können. Es ist ja:

$$z = f\,(f\,(x,\ a),\ b) = f\,(x,\ f\,(a,\ b)) \tag{9}$$

Mit anderen Worten, der Ausdruck:

$$f\,(f\,(x,\ a),\ b)$$

ist bei den (𝔖)-Gruppen eine symmetrische Function seiner drei Argumente. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so bilden die Transformationen:

$$y = f\,(x,\ a)$$

offenbar eine (𝔖) Gruppe. Es gilt somit der namentlich für Anwendungen sehr brauchbare Satz:

Theorem 4. ‚Damit eine Transformation $y = f\,(x,\ a)$ eine (𝔖) Gruppe bildet, ist notwendig und hinreichend, dass der Ausdruck:

$$f\,(y,\ f\,(x,\ a))$$

eine symmetrische Function seiner drei Argumente ist.'

In Verbindung mit dem Vorigen folgt hieraus als ganz selbstverständliches Corollar:

Corollar: ‚Wenn eine Function $f\,(y,\ f\,(x,\ a))$ symmetrisch in den 3 Argumenten ist, so existiert immer eine Function φ, so dass:

$$\frac{dx}{\varphi x} + \frac{da}{\varphi a} = 0$$

ist, und zwar wird:

$$\frac{\varphi a}{\varphi x} = \frac{\dfrac{\partial f\,(x,\ a)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f\,(x,\ a)}{\partial a}} \tag{10}$$

e Differentialgleichung folgt aus (3), wenn man $y =$ Const. setzt; die Gleichung (10) dient zur Bestimmung von φ, wenn f bekannt ist.

Dieses Corollar ist nun schon von *Abel*[1]) gefunden worden, indem er sich direkt die Aufgabe stellte, alle Functionen f zu bestimmen, für die der Ausdruck:

$$f\,(y,\ f\,(x,\ a))$$

symmetrisch ist.

Ferner ist zu bemerken, dass die Darstellung:

$$y = f\,(x,\ a)$$

insofern keine eindeutige ist, als man für a einen anderen Parameter einführen kann, etwa b und y immer noch eine symmetrische Gruppenfunction bleibt. In der That braucht man nur zu setzen:

$$a = f\,(b,\ c), \tag{11}$$

wo c eine numerische Constante ist. Dies ist aber auch die einzige Substitution, welche, dies leistet. In der That, es sei:

$$a = \psi b,$$

[1]) *Abel*, a. a. O, I, Abhandlung VI.

dann sollen die beiden Gleichungen bestehen:

$$\text{I.} \qquad f(x, \psi b) = f(b, \psi x)$$

$$\text{II.} \qquad f(f(x, \psi b), \psi c) = f(x, f(\psi b, \psi c))$$

Nun wird:

$$f(x, \psi b) = f(b, \psi b) + (x - b)\left[\frac{\partial f(x, \psi b)}{\partial x}\right]_{x=b} + \ldots$$

$$f(b, \psi x) = f(b, \psi b) + (x - b)\left[\frac{\partial f(\psi x, b)}{\partial x}\right]_{x=b} + \ldots$$

also:

$$\left\{\frac{\partial f(x, \psi b)}{\partial x}\right\}_{x=b} = \left[\frac{\partial f(\psi x, b)}{d\,\psi x}\right]_{x=b} \psi' b\text{, d. i.:}$$

$$\frac{d\,\psi b}{db} = \left\{\frac{\dfrac{\partial f(p, q)}{\partial q}}{\dfrac{df(p, q)}{\partial p}}\right\}_{\substack{p=\psi b\\ q=b}} = \left(\frac{\varphi p}{\varphi q}\right)_{\substack{p=\psi b\\ q=b}} = \frac{\varphi(\psi b)}{\varphi b}$$

Hieraus folgt:

$$\psi b = f(b, c)$$

und II ist von selbst erfüllt.

3. Was nun die Invarianten der Gruppe anlangt, so haben wir wieder zu unterscheiden zwischen denen, welche für jede Lage des Punktes x gelten und solchen, bei denen die Lage des Punktes x eine bestimmte ist.

I. Invarianten für Punkte beliebiger Lage.

Wir haben schon im Falle beliebig vieler Veränderlicher gesehen, dass die Transitivität unserer continuierlichen Gruppe das Vorkommen von solchen unmöglich macht. Denken wir uns dagegen in:

$$y = f(x, a)$$

a sich nicht stetig, sondern sprungweise ändernd, so zwar, dass die Transformationen nicht mehr ein Continuum, wohl aber eine Gruppe bilden, so wird es sehr wohl Invarianten dieser discreten Gruppe geben können. Von diesen werden wir ein Theorem ableiten, das eine Verallgemeinerung des *Jacobi*schen über die Existenz mehrfach periodischer Functionen bildet und uns später von Nutzen sein wird. Es lautet:

Theorem 5. „Ist I eine Function einer reellen Veränderlichen x, welche zwei reelle discrete Gruppen gestattet, die aus einer eingliedrigen continuierlichen durch Spezialisation der Parameter entstanden ist, so dass also:

$$I[f(x, a)] = I(x); \; I[f(x, b)] = I(x), \qquad (12)$$

so sind f (x, a), f (x, b) Iterationen einer und derselben Substitution f (x, t):

$$f(x, a) = f(x, f^{m-1}(t, t)); \; f(x, b) = f(x, f^{n-1}(t, t))$$

und es ist:

$$I[f(x, t)] = I(x).“$$

Ist nämlich:

$$\mathrm{I}f(x, a) = \mathrm{I}x, \ \mathrm{I}f(x, b) = \mathrm{I}x,$$

so lässt sich ja die Gruppe $y = f(x, a)$ auf die canonische Form bringen:

$$\Phi y = \Phi x + \Phi a.$$

Bedeutet also Φ^{-1} die zu Φ inverse Function, so ist gleichzeitig:

$$\mathrm{I}\,\Phi^{-1}(\Phi x + \Phi a) = \mathrm{I}\,\Phi^{-1}(\Phi x) \text{ und } \mathrm{I}\,\Phi^{-1}(\Phi x + \Phi b) = \mathrm{I}\,\Phi^{-1}(\Phi x)$$

Also — allerdings vorausgesetzt, dass die Function Φ^{-1} existiert — giebt es eine Invariante $\mathfrak{J}'$, sodass:

$$\mathfrak{J}'(\mathfrak{x} + \mathfrak{a}) = \mathfrak{J}'\mathfrak{x}; \ \mathfrak{J}'(\mathfrak{x} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{J}'(\mathfrak{x})$$

Dies ist aber nach einem *Jacobi*schen Satze nur möglich, wenn:

$$\mathfrak{a} = m\mathfrak{t}, \ \mathfrak{b} = n\mathfrak{t} \text{ und } \mathfrak{J}'(\mathfrak{x} + \mathfrak{t}) = \mathfrak{J}'(\mathfrak{x})$$

Also folgt:

$$\Phi a = m\,\Phi t; \ \Phi b = n\,\Phi t$$

oder:

$$a = f^{m-1}(t, t); \ b = f^{n-1}(t, t)$$

$$f(x, a) = f(x, f^{m-1}(t, t)); \ f(x, b) = f(x, f^{n-1}(t, t))$$

Zusatz. Sind die Variablen complex, so sind höchstens 2 unabhängige Substitutionen der obigen Art möglich.

II. Spezielle Invarianten. Nehmen wir jetzt wieder unsere Gruppe continuierlich an, so existieren nur spezielle Invarianten und zwar treten sie nach den Betrachtungen § 1, 6 als Abbildungen der Invarianten der ähnlichen Gruppe:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \mathfrak{a}$$

auf. Bei dieser haben wir nur den invarianten Punkt $\mathfrak{x} = \infty$ zu verzeichnen. Bei der Gruppe (1) bleiben also diejenigen Punkte invariant, für die $\Phi x = \infty$ ist. Hierdurch haben wir nun eine Ergänzung des *Cauchy*schen Existenztheorems für unsere Differentialgleichung. Dieses besagt ja, dass sich das Integral regulär verhält als Function von x, wenn bei den Anfangsbedingungen die Nullstellen von φ vermieden werden. Es giebt dagegen keine Auskunft, wie sich das y als Function von x und a verhält, und was geschieht, wenn die Werte von x in die singulären Stellen der Coefficienten, z. B. in die Nullstellen von φ rücken. Es bleiben daher zwei Fragen offen:

1) Wenn x in eine Nullstelle von φ rückt, was geschicht dann mit y; wird es singulär? Besitzt y überhaupt feste Singularitäten?

2) Wenn umgekehrt y singulär wird, wie äussert sich dies bei der Differentialgleichung?

Diese Fragen sind von fundamentaler Bedeutung für die Theorie der Differentialgleichungen. Bei den Differentialgleichungen mit festen Verzweigungspunkten, insbesondere den linearen, fallen eben die Singularitäten der Coefficienten mit denen der Integrale der Hauptsache nach zusammen. Bei den Differentialgleichungen mit beweglichen Singularitäten wie der unsrigen ist dies aber nicht der Fall und daher entstehen die beiden obigen Fragen, durch deren Lösung dieselben erst der Behandlung zugänglich gemacht werden können.

Im Falle unserer Differentialgleichung sind es nun eben die Invarianteneigenschaften, die darüber Aufschluss geben. Sehen wir, um dies zu erläutern einmal von Punkten der Unbestimmtheit und Verzweigungspunkten, deren Rolle später sehr ausführlich gekennzeichnet ist, ab und betrachten nur rationale Singularitäten, so wird, wenn φ Null wird, auch Φ unendlich. ‚Die Nullstellen von φ sind also die beider Gruppe invarianten Punkte x, sind dagegen im allgemeinen keineswegs Singularitäten der Function f‘.

$$\text{Beispiel: } \frac{dy}{1+y^2} - \frac{dx}{1+x^2} = 0 \quad y = \frac{x+a}{1-ax}, \quad \varphi x = 1 + x^2; \quad \varphi i = 0$$

$$f(x, i) = x, \; y = x$$

Vielmehr wird es sich herausstellen, dass die Nullstellen und Unendlichkeitsstellen von f im allgemeinen immer Functionen von a, also verschiebbar sind[1]), demnach durchaus keine Singularitäten der Coefficienten. Ist vielmehr f unendlich, so wird x dasjenige particulare Integral $x = \chi a$ von:

$$\frac{dx}{\varphi x} + \frac{da}{\varphi a} = 0$$

welches für $a = x_0$ unendlich wird.

Die Beweise für das hier Gesagte werden die folgenden Entwicklungen geben. Wir haben dies vorausgeschickt, um die engen Beziehungen zu kennzeichnen, die zwischen den Invarianten- und Singularitätenfragen bestehen.

Im Folgenden geben wir nun zur Erläuterung die Lösung des eingangs erwähnten, *Weierstrass*schen Problems: ‚Alle algebraischen Integrale von (1) anzugeben‘; und zwar werden wir zunächst alle rationalen aufsuchen.

§ 4. Die algebraischen Integrale $y = f(x, a)$ von $\frac{dy}{\varphi y} - \frac{dx}{\varphi x} = 0$.

Die Formel (1^c) des § 3 zeigt, dass, wenn f eine algebraische Function ist, φ ebenfalls eine solche ist — was übrigens ziemlich selbstverständlich ist und auch noch auf andere Weise erkannt werden kann.

Wir behandeln zunächst:

I. Die rationalen Integrale.

1. Soll zunächst f eine ganze rationale Function sein, so folgt, wenn:

$$y = p_0(a) \, . \, x_n + p_1(a) \, . \, x^{n-1} + \ldots = f(x, a):$$

$$z = f(y, a) = p_0 \, . \, y^n + p_1 \, . \, y^{n-1} + \ldots = p_0^{\,n+1} x^{n2} + \ldots .$$

Zufolge der Gruppeneigenschaft ist aber:

[1]) oder wenigstens so angenommen werden können: Vergl. § 4. Satz 3.

$$z = f(y, a) = f(x, c)$$

vom selben Gerade wie y, also haben wir:

$$n^2 = n;\ n(n-1) = 0,\ n = 1.$$

Wir setzen daher an;

$$y = f(x, a) = \alpha a x + \beta (a + x) + \gamma \qquad \text{(a)}$$

und verwenden zur näheren Bestimmung der Coefficienten das Theorem 4. Bilden wir nämlich:

$$z = f(y, b) = \alpha by + \beta (b + y) + \gamma = (\alpha b + \beta)\,[\alpha a x + \beta (a + x) + \gamma] + \beta b + \gamma,$$

so soll dies symmetrisch in a, b, x sein. Dies giebt als einzige Bedingung:

$$\beta(\beta - 1) = \alpha\gamma \qquad \text{(b)}$$

Für φx ergiebt sich nach (10):

$$\varphi x = \alpha . x + \beta, \text{ also } \Phi x = \log(\alpha x + \beta),$$

wenn x_0 so gewählt wird, dass

$$\alpha x_0 + \beta = 1.$$

2. Die rationalen gebrochenen y.

Wir wenden wieder zuerst die Gruppeneigenschaft an, um den Grad von Zähler und Nenner, dann Theorem 4, um die Beschaffenheit der Coefficienten zu bestimmen. Es sei:

$$y = f(x, a) = \frac{Px}{Qx};\ z = f(y, a) = \frac{Py}{Qy};\ Px = a_0 x^m + \ldots,\ Qx = b_0 x^n + \ldots$$

Natürlich wählen wir P prim zu Q und setzen, um die Ideen zu fixieren, fest, dass der Grad des Zählers den des Nenners nicht übersteigt, also $m < n$. Dann wird:

$$z = \frac{a_0 P^m + a_1 P^{m-1} Q + \ldots}{b_0 P^n + b_1 P^{n-1} Q + \ldots} \cdot Q^{n-m} = f(x, c)$$

Dieser Bruch ist in seiner reduzierten Form, also muss der Zähler denselben Grad wie Px, der Nenner wie Qx haben oder es ist:

$$n^2 = m,\ n^2 = n,\ m = n = 1.$$

Ganz dasselbe hätte man erhalten, wenn $m > n$ gewesen wäre. Das Theorem 4 führt jetzt durch Vergleichung der Coefficienten, wie es in 1 geschah, auf die Form:

$$y = \frac{2A(a + x) - Bax - AB}{B(a + x) - 2ax - (B^2 - 2A)},\ \text{wenn } x_0 = {}^1\!/_2\, B. \qquad (r)$$

und es wird $\varphi x = A - Bx + x^2$.

Aus dem Bisherigen lässt sich Folgendes entnehmen:

Theorem 5. ‚Ist die (𝔖)-Function f (x, a) rational, so ist sie vom ersten Grade und kann nur eine der unter (a, b) und (c) angegebenen Formen besitzen. Die ganzen f gehen durch die linearen Substitutionen:

$$\alpha y + \beta = \bar{y},\ \alpha x + \beta = \bar{x},\ \alpha a + \beta = \bar{a}$$

in ihre einfachste Form über

$$\bar{y} = \bar{a}\,\bar{x},\ \text{wobei } \varphi\,\bar{x} = \bar{x}$$

die gebrochenen gehen durch die linearen Substitutionen:

$$x = \frac{2x - B}{\sqrt{4A - B^2}}$$

über in:

$$y = \frac{\bar{a} + \bar{x}}{1 - \bar{a}\,\bar{x}}‘.$$

Hieraus folgt als Corollar:

Corollar: ‚Es giebt keine Function , die der Gleichung:

$$y = x + \Phi a$$

genügt, wenn y eine rationale Function höheren Grades von x ist. Ist aber y linear, so ist Φ der Logarithmus oder Arcustangens einer linearen Function oder selbst eine lineare Function.‘

3. Dieser Satz führt zu der allgemeineren Frage, wann y eine eindeutige Function ist. Diese ist sehr leicht zu beantworten; in der That, wenn $y = f(x, a)$ eindeutig ist, so wird umgekehrt:

$$x = f'(y, a)$$

ebenfalls eine eindeutige Function des Argumentes. Daher besitzt y keinen Punkt der Unbestimmtheit, ist demnach rational und x auch als Function von y rational. Daher folgt aus den letzten Betrachtungen in 2., dass $y = f(x, a)$ linear ist. Also: Theorem 5ª. ‚Die einzigen eindeutigen ($\mathfrak{S}$)-Functionen sind die in Theorem 5 angegebenen.‘

II. Die algebraischen Integrale.

Ist:

$$y = f(x, a) \qquad (f)$$

die Gleichung unserer Gruppe und substituiert man:

$$y = Xy_1,\ x = Xx_1,\ a = Xa_1 \qquad (X)$$

so geht die Gruppe (f) wieder in eine Gruppe über:

$$y_1 = \bar{f}(x_1, a_1); \qquad (\bar{f})$$

ist aber f algebraisch, so wird auch $\bar{f}$ algebraisch, wenn X algebraisch ist. Wir werden daher alle ($\mathfrak{S}$)-Gruppen, die sich durch algebraische Substitutionen (X) in einander überführen lassen, wie (f) und ($\bar{f}$) als ‚aequivalent‘ betrachten und unsere Gruppen auf aequivalente von möglichst einfacher Form zurückzuführen suchen.

1. Was zunächst die Beschaffenheit von φ anlangt, so können wir immer annehmen, dass es im Unendlichen wirklich unendlich wird, also eine Entwicklung hat von der Form:

$$\varphi z = z^{\lambda}\, E(z, \infty),\ \lambda > 0$$

wobei wie immer im Folgenden $E(z, a)$ eine Grösse bedeuten soll, die für $z = a$ weder 0 noch ∞ wird.[1]) Alsdann ist die Differentialgleichung:

[1]) Im Anschluss an eine Bezeichnungsweise von Herrn *C. Neumann*.

$$\frac{dy}{\varphi y} + \frac{dx}{\varphi x} = 0.$$

immer aequivalent einer solchen, wo φ algebraisch ganz [1]) ist. Ist nämlich φ nicht ganz, so lässt es sich in die Form setzen:

$$\varphi z = \frac{\psi z}{g z}$$

wo ψ algebraisch ganz und g ganz und rational ist; dabei sei:

$$g z = z^{\gamma} \, E\,(z, \infty);$$

dann wird die Differentialgleichung:

$$\frac{g y\, dy}{g x\, dx} = \frac{\psi y}{\psi x}$$

Setzt man nun:

$$g x\, d x = d G x = d \xi, \text{ nämlich } G x = \xi, \text{ folglich } x = G^{-1} \xi$$
$$g y\, d y = d G y = d \eta, \quad \text{„} \quad G y = \eta, \quad \text{„} \quad y = G^{-1} \eta,$$

so ist G ganz und rational, G^{-1} algebraisch ganz, also:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\psi\, G^{-1}\, \eta}{\psi\, G^{-1}\, \xi} = \frac{\chi \eta}{\chi \xi}$$

wo χ algebraisch ganz ist. Wir können also den Satz aufstellen:
Satz 1: ‚Die Differentialgleichung (φ) ist aequivalent einer solchen, wo φ eine ganze algebraische Grösse ist.'

2. Wir gehen jetzt daran das Verhalten von y an den einzelnen seiner singulären Stellen zu prüfen. Zunächst gilt:
Satz 2: ‚Die Function $y = f\,(x, a)$ habe für $x = x$ die Entwicklung:

$$y = x^{\alpha}\, E\,(x, \infty);$$

dann ist α entweder 0 oder 1.'

Diese Thatsache ist eine unmittelbare Folge der Gruppeneigenschaft; denn $f\,(f\,(x, a), b)$ hat an Stelle von α den Exponenten α^2, da aber:

$$f\,(f\,(x, a), b) = f\,(x, f\,(a, b))$$

ist, so folgt:

$$\alpha^2 = \alpha, \; \alpha\,(\alpha - 1) = 0$$

also α 0 oder 1.

Was nun die ∞- und 0-stellen von y im Endlichen anbetrifft, so sind die in Frage kommenden Gruppenfunctionen sämtlich solchen aequivalent, bei welchen nur verschiebbare Singularitäten auftreten. Denn nach § 3, Formel 10 ist:

$$\frac{\varphi a}{\varphi x} = \frac{\dfrac{\partial f(x, a)}{\partial x}}{\dfrac{\partial f(x, a)}{\partial a}}$$

---

[1]) Vergl. z. B. *Kronecker* Festschrift § 5.

Hat nun y die feste Unendlichkeits- oder Nullstelle $x = c$, so hat es auch zufolge der Symmetrie die entsprechende Stelle $a = c$, oder es ist:

$$y = (x - c)^{\alpha} (a - c)^{\alpha} E (x; a, c)$$

wo $E(x, a, c)$ weder für $x = c$ noch für $a = c$ Null oder unendlich wird. Daher wird:

$$\frac{\varphi x}{\varphi a} = \frac{(x - c)^{\alpha} (a-c)^{\alpha-1} E (x, a, c)}{(x - c)^{\alpha-1} (a - c)^{\alpha} E (x, a, c)} = \left(\frac{a-c}{x-c}\right)^{-1} E (x, a, c)$$

und es bleibt:

$$\lim_{x=c} (x - c)^{-1} \varphi x$$

endlich. φx hat also eine Entwicklung:

$$\varphi x = (x - c) E (x, c)$$

daher wird:

$$\Phi x = \log (x - c) + \overline{E} (x, c) + \text{Const.}$$

Damit sich daher aus:

$$\Phi y = \Phi x + \Phi a$$

y als algebraische Function von x und a ergiebt, muss Φ überhaupt der Logarithmus einer algebraischen Function werden, etwa $\Phi z = \log Xz$, so dass:

$$\log Xy = \log Xx + \log Xa ; Xy = Xx \cdot Xa$$

Demnach ist in diesem Falle die Gruppe (f) aequivalent der folgenden:

$$\bar{y} = \bar{x} . \bar{a}.$$

Nun kann offenbar die Gleichung:

$$y = f (x, a)$$

auch als Integralgleichung von:

$$\frac{dx}{\varphi x} + \frac{da}{\varphi a} = 0 \qquad (\varphi)$$

angesehen werden, wobei y als Integrationsconstante figuriert; und zwar wird für $a = x_0$ $x = y$; ist daher u eine Unendlichkeitsstelle von y, welche also sicher als Function von a angenommen werden kann $= u(a)$, so ist dies ein particulares Integral von (φ), welches für $a = x_0$ den Wert unendlich annimmt. Es folgt also der Satz:

Satz 3. ‚Die Unendlichkeitsstellen von y im Endlichen können sämtlich als Functionen von a angenommen werden und sind dann diejenigen particularen Integrale von (φ): $u(a)$, welche für $a = x_0$ unendlich gross werden.'

Es werde nun y in die Form gesetzt:

$$y = \frac{P (x, a)}{Q (x, a)}$$

wobei;

$$Q (a, x) = N (a) . (x - u_1 (a))^{\alpha_1} (x - u_2 (a))^{\alpha_2} \ldots ; \; (\alpha_1, \alpha_2, .. \text{ positiv und ganz})$$

Jedes $u(a)$ ist ein Integral von $\frac{dx}{\varphi x} + \frac{da}{\varphi a} = 0$, welches für $a = x_0$ ∞ wird;

also ist zufolge der Symmetrie von (φ) auch $a = u(x)$ ein Integral, das für $x = x_0$ ∞ wird, daher lässt sich Q auch die Form geben:

$$Q(a, x) = M(x).(a - u_1(x))^{\alpha_1} \ldots .$$

N und M haben dabei die Bestimmung lediglich die in den u auftretenden Nenner fortzuheben, also ist $N = M$ oder:

$$Q(a, x) = Q(x, a)$$

Demnach lässt sich y die Gestalt geben:

$$y = \frac{P(x, a)}{Q(x, a)} = \frac{P(x, a)}{N(a).(x - u_1)^{\alpha_1} \ldots (x - u_m)^{\alpha_m}};$$

dabei sind die u niemals von a unabhängig, Q nicht o für $N(a) = o$ und symmetrisch in x und a, endlich die α ganz und positiv.

Da nun ferner für $a = x_0$ $x = y$ wird, so sind die u so beschaffen, dass für $a = x_0$ $u = \infty$ wird, also von der Form:

$$u_i = \frac{M_i(a)}{a - x_0}$$

Setzt man dies in Q ein, so erhält y die Form:

$$y = \frac{P(x, a)}{\prod_i [x(a - x_0) - M_i(a)]^{\alpha_i}}$$

oder auch, wenn $M_i(a) = \mu_i(a) + a x_0$ gesetzt wird,

$$y = \frac{P(x, a)}{\prod_i [ax - x_0(a + x) - \mu_i(a)]^{\alpha_i}}$$

Bezeichnet man die symmetrische Function $ax - x_0(a + x)$ mit σ, so dass σ, x und a unabhängige Variable sind — denn a, x, x_0 sind es auch — so hat der Nenner die Gestalt:

$$Q(x, a) = p_0(a).\sigma^{\nu} + p_1(a).\sigma^{\nu-1} + \ldots + p_{\nu}(a)$$

Er bleibt ungeändert bei Vertauschung von x und a, ebenso σ, also folgt:

$$p_0(a) = p_0(x),\ p_1(a) = p_1(x). \ldots$$

Die p sind also constant, also auch die μ und y hat die Form:

$$y = \frac{P(x, a)}{\prod_i [ax - x_0(a + x) + \mu_i]^{\alpha_i}} = \frac{P(x, a)}{N(a).\prod_i \left[x - \frac{x_0 a + \mu_i}{a - x_0}\right]^{\alpha_i}}$$

wobei die μ Constante sind. Also folgt:

Satz 4. ‚Ist y nicht algebraisch ganz, so hat es die Form:

$$y = \frac{P(x, a)}{\prod_i [ax - x_0(a + x) - \mu_i]^{\alpha_i}} = \frac{P(x, a)}{N(a) \prod_i [x - u_i]^{\alpha_i}},\ u_i = \frac{x_0 a + \mu_i}{a - x_0}. \quad (P)$$

wo die μ Constante sind. Die μ sind also rationale Functionen ersten Grades von a. Man kann es immer erreichen, dass sie wirklich von a abhängen.'

Nun könnte es ja vorkommen, dass die Factoren im Nenner sich teilweise gegen solche im Zähler heben, so dass y die Form hätte:

$$y = \frac{P'(x, a)}{N'(a) \prod_i (x - u_i)^{\alpha'_i}}$$

wo die α'_i nicht mehr ganz zu sein brauchten. Dann sei ihr Generalnenner α', so würde die Substitution:

$$y^{\alpha'} = \eta, \; x^{\alpha'} = \xi, \; a^{\alpha'} = a$$

die particularen Integrale von (φ), u, in solche einer Differentialgleichung (φ) u', verwandeln, so dass:

$$\mu' = \sqrt[\alpha']{\frac{x_0 a^{\frac{1}{\alpha'}} + \mu}{a^{\frac{1}{\alpha'}} - x_0}}$$

nicht mehr rational wäre, was gegen unseren Satz 4 verstösst. Also:
Zusatz. ‚Die α in der Form (P) sind ganze Zahlen und P für $x = u_i$ nicht 0'.

3. Beziehungen zwischen den Singularitäten von y und φ. Hat y an einer Unendlichkeitsstelle u die Entwicklung:

$$y = (x - u)^{-\alpha} E(x, u), \text{ also } \frac{dy}{dx} = (x - u)^{-\alpha-1} E(x, u) \qquad \text{(E)}$$

so wird:

$$\frac{dy}{dx} = (x - u)^{-\alpha-1} E(x, u); \; \varphi x = x^{\beta} E(x, \infty); \; \frac{\varphi y}{\varphi x} = (x - u)^{-\alpha\beta} E(x, u)$$

also folgt:

$$\alpha + 1 = \alpha\beta, \; \beta = 1 + \frac{1}{\alpha}, \; \alpha = \frac{1}{\beta - 1}$$

Da α ganzzahlig ist, so liegt β zwischen den Grenzen 1 und 2. Da man nun immer annehmen kann, dass der ∞ ferne Punkt kein Verzweigungspunkt von φ ist, so folgt, dass β entweder 1 oder 2 angenommen werden kann. Freilich, wenn $\beta = 1$ ist, so ist die Entwicklung (E) unmöglich, dies kann also nur für ganze algebraische Grössen eintreten. Allerdings ist nicht zu vergessen, dass bei all den algebraischen Substitutionen (X) auch β sich auf 0 hätte reduzieren können, so dass φ eine Constante geworden wäre und unserer Gruppe der Translation aequivalent wäre

$$y = x + a$$

und Φ selbst algebraisch. Von diesem Falle können wir absehen und es folgt:
Satz 5. ‚Ist y nicht algebraisch ganz, so sind die α in Form (P) gleich 1 annehmbar und dann wird β in

$$\varphi z = z^{\beta} E(z, \infty)$$

gleich 2. β kann nur noch 1 sein, dann ist y algebraisch ganz'.

4. Anzahl der Factoren von Q. Es ist:

$$u = \frac{a x_0 + \mu}{a - x_0} \qquad \text{(E)}$$

wenn x_0 endlich, dagegen

$$u = \mu . a \qquad \text{(U)}$$

wenn x_0 unendlich. Wir wählen für den Augenblick $x_0 = \infty$; dann wird:

$$\frac{du}{da} = \mu = -\frac{\varphi u}{\varphi a} = -\frac{\varphi\ (\mu a)}{\varphi a}$$

oder:

$$\varphi\ (\mu a) = -\mu\,.\,\varphi a;\ \varphi'\ (\mu a)^2 = (\varphi' a)^2,\ \text{wo}\ \varphi' z = \frac{d\varphi z}{dz} \qquad (\varphi')$$

Also ist $(\varphi' a)^2$ eine Invariante der eingliedrigen discreten Grnppe $u = \mu a$. Einer Unendlichkeitsstelle von y u in (U) entspricht also immer eine Invariante in (φ') und man kann sich leicht überzeugen, dass man auch φ immer in einer solchen Form annehmen kann, dass auch das Umgekehrte der Fall ist. In der Gleichung (φ') greifen aber die Voraussetzungen des Theorems 5 Platz, es giebt also nur 2 unabhängige u, für die φ' erfüllt ist, also auch höchstens 2 Unendlichkeitsstellen u in (U). Jeder solchen Substitution u in (U) entspricht eine in (E) und umgekehrt. Wir haben also das Resultat:

Satz 6. ‚Ist die ($\mathfrak{S}$)-Function algebraisch gebrochen, so ist sie immer aequivalent einer ($\mathfrak{S}$)-Function der Form:

$$y = \frac{P(x, a)}{N\ (a)\ (x - u_1)\ (x - u_2)} = \frac{P\ (x, a)}{[ax - x_0\ (a + x) - \mu_1]\ [ax - x_0\ (a + x) - \mu_2]}$$

Für $x = u_1$ oder u_2 wird P weder 0 noch ∞, P ist algebraisch ganz.‘

Nunmehr sind wir soweit vorbereitet, um die Darstellung der verlangten Typen zu geben, auf welche sich durch Substitutionen (X) die ($\mathfrak{S}$)-Gruppen, wenn sie algebraisch sind, zurückführen lassen.

5. Aufstellung der algebraisch ganzen y. Ist y ganz, so verhält es sich im Unendlichen wie x^1 (Satz 2), setzen wir also an:

$$y = M\ (x,\ a)\ \varphi x + N\ (x,\ a)\ \varphi a,$$

so werden M und N im Endlichen niemals unendlich, φ verhält sich im Unendlichen wie x^1 (Satz 5), daher ist M von x, N von a unabhäng, M eine Function ersten Grades von a, N dieselbe von x. Deshalb hat y die Form:

$$y = (Aa + B)\ \varphi x + (Ax + B)\ \varphi a$$

wo A und B nicht von x und a abhängen. Hieraus folgt durch Differentiation bei constantem y[1]):

$$[(Aa + B)\ \varphi' x + A\varphi a]\ dx + [(Ax + B)\ \varphi' a + A\varphi x]\ da = 0$$

oder da $\varphi a\ dx + \varphi x\ da = 0$:

$$[(Aa + B)\varphi' x + A\varphi a]\varphi x - [(Ax + B)\varphi' a + A\varphi x]\varphi a = 0$$
$$(Aa + B)\varphi x\varphi' x - (Ax + B)\varphi a\varphi' a = 0$$
$$\frac{\varphi x\varphi' x}{\varphi a.\varphi' a} = \frac{Ax + B}{Aa + B}$$

also:

$$(\varphi x)^2 = {}^1/_2\,Ax^2 + Bx + C = Rx\ \ ,\ \ \varphi x = \frac{1}{\sqrt{-C}}\ \text{arc sin}\ \frac{-2Cx - B}{\sqrt{B^2 - 2AC}}$$

$$y = (Aa + B)\sqrt{Rx} + (Ax + B)\sqrt{Ra}$$

---

[1]) Diese Methode stammt im Grunde genommen von *Abel*, Oeuvres complètes I, Abb. 1.

Hiermit ist gezeigt, dass alle ganzen algebraischen (𝔖)-Gruppen entweder einer Translation aequivalent ist oder einer solchen Funktion $y = f(x, a)$, welche beim Additionstheoreme des Arcusinus auftritt. Da letzterer selbst dem Logarithmus aequivalent ist, so können wir sagen:

‚Alle ganzen algebraischen (𝔖)-Gruppen sind aequivalent der Translation $\bar{y} = \bar{x} + \bar{a}$ oder der Transformation $\bar{y} = \bar{x}\,\bar{a}$'.

Natürlich sind auch nicht ganze algebraische (𝔖)-Gruppen auch unter Umständen der Translation aequivalent sein oder der Transformation $\bar{y} = \bar{x}\,\bar{a}$.

Sämtliche bisher betrachteten Gruppentransformationen, die rationalen nämlich und die algebraisch ganzen, sowie alle diejenigen, welche sich durch algebraische Substitution (X) auf solche zurückführen liessen, ihnen aequivalent waren, hatten die Eigentümlichkeit invariante Punkte zu besitzen. War z. B.:

$\varphi z = z$, $y = f(x, a) = a + x$, so war $x = \infty$ 1 invar. Punkt
$\varphi z = \log z$, $y = f(x, a) = a . x$, so waren $x = 0$, $x = \infty$ 2 invar. Punkte
$\varphi z = \operatorname{arc\,tg} z$, $y = \frac{a + x}{1 - ax} = f(x, a)$, „ „ $x = i$, $x = -i$ 2 „ „
$\varphi z = \arcsin z$, $y = f(x, a) = a\sqrt{1 - x^2} + x\sqrt{1 - a^2}$, „ war $x = \infty$ 1 invar. Punkt.

Die invarianten Punkte waren die Unendlichkeitsstellen von φ (Seite 21 II Spezielle Invarianten).

Wir werden jetzt zu der zweiten Klasse algebraischer Gruppen kommen, deren Transformationen alle aequivalent untereinander und speziell derjenigen sind, welche beim Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung auftreten. Da diese niemals unendlich werden, so kann auch die ihnen entsprechende Transformation $y = f(x, a)$ keine invarianten Punkte besitzen, demnach besitzt überhaupt keine Transformation dieser Klasse invariante Punkte.

Wir gehen jetzt zur Darstellung dieser Transformationen.

6. Die algebraisch gebrochenen y. In diesem Falle verhält sich φ im Unendlichen wie x^2 oder ist doch einem solchen aequivalent, y hatte die Form:

$$y = \frac{P(x, a)}{(ax - c_1)\,(ax - c_2)}$$

wenn wir $x_0 = 0$ annehmen; dabei wurde P niemals unendlich im Endlichen. Da $\frac{1}{y}$ analoges Verhalten wie y zeigt, so ist der Exponent α in Satz 2 nicht 1, sondern 0. Setzen wir daher an:

$$y = \frac{(Ax + B)\varphi a + (Aa + B)\varphi x}{(ax - c_1)\,(ax - c_2)}$$

so lässt sich dies auf ganz dieselbe Art wie in (5) rechtfertigen, übrigens wird noch $B = 0$, da für $x = x_0 = 0$ $y = a$ sein soll. Daher wird:

$$y = A . \frac{x\varphi a + a\varphi x}{(ax - c_1)\,(ax - c_2)}$$

und wenn für $A . \varphi z$ φz gesetzt wird:

$$y = \frac{a.\varphi x + x.\varphi a}{(ax - c_1)(ax - c_2)} = \frac{a\varphi x + x\varphi a}{a^2x^2 - Aax + B}$$

Differenzieren wir wieder bei constantem y und beachten $(\bar{\varphi})$ so folgt:

$$(a^2x^2 - \bar{A}ax + \bar{B})\,[(a.\varphi'x + \varphi a).\varphi x - (x.\varphi'a + \varphi x).\varphi a]$$
$$- (a.\varphi x + x.\varphi a)\,[(2a^2x - Aa)\,\varphi x - (2ax^2 - \bar{A}x).\varphi a] = 0$$

Setzt man $(\varphi x)^2 = \psi x$, so folgt:

$$\tfrac{1}{2}(a^3x^2 - Aa^2x + \bar{B}a)\,.\,\frac{d\psi x}{dx} - (2a^3x - Aa^2).\psi x$$
$$+ \{(2a\psi a - \tfrac{1}{2}a^2\psi'a)x^3 + \bar{A}\,(\tfrac{1}{2}a\psi'a - \psi a)x^2 - \tfrac{1}{2}B\psi'a.x\} = 0.$$

Für $a = 0$ folgt, da $\varphi(0)$ nicht 0 sein kann, sonst wäre ja nicht für $x = 0$ $y = a$:

$$\bar{A} = 0$$

Setzt man jetzt $a =$ Const. so besteht für ψx die lineare Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta).\,\psi'x - 2\alpha x.\,\psi x = (\gamma x^2 + \delta)x, \text{ wo } \alpha, \beta, \gamma, \delta = \text{Const},$$

welche, nach der *Lagrange*schen Methode integriert, liefert:

$$\psi x = A_1x^4 + A_2x^2 + A_3 \quad , \quad \varphi x = \sqrt{A_1x^4 + A_2x^2 + A_3} = \sqrt{Rx}$$

$$y = \frac{a\sqrt{Rx} + x\sqrt{Ra}}{a^2x^2 - \bar{A}ax + \bar{B}} = \frac{a\sqrt{Rx} + x\sqrt{Ra}}{a^2x^2 + \bar{B}}$$

Also:

„Die gebrochenen algebraischen ($\mathfrak{S}$)-Gruppen sind entweder den Ende 5 angegebenen aequivalent oder demjenigen $y = f(x, a)$, welches beim Additionstheoreme der elliptischen Integrale erster Gattung auftritt. Alle algebraischen Gruppen teilen sich demnach in 2 Klassen; solche, die invariante Punkte besitzen, bilden die erste; alle, die keine invarianten Punkte besitzen, die zweite Klasse. Die Transformationen der zweiten sind sämtlich untereinander aequivalent, die der ersten sind entweder aequivalent $y = x + a$ oder $y = xa$.

VITA.

Natus sum Georgius Bohlmann Berolinensis a. d. X. Kal. Mai. a. h. s. LXIX patre Otto, qui dicebatur ‚Justizrat am Obertribunal', matre Ottilia, e gente Brix. Fidei addictus sum evangelicae. Adii gymnasium Guilelmi Berolinense, deinde regium gymnasium Lipsiense, tum rursus Berolinum reversus et in gymnasium Guilelmi iterum receptus maturitatis testimonium adeptus sum a. h. s. LXXXVIII. Paulo post in ordinem philosophorum receptus sum universitatis Berolinensis in eaque per octo semestria studiis mathematicis et physicis operam dedi. Audivi viros clarissimos Dilthey, Fuchs, Kötter, Kronecker (†), Kundt, Paulsen, Plank, de Richthofen, Schwendener, Zeller. Quibus omnibus viris optime de me meritis gratias ago quam maximas semperque habebo. Exercitationibus seminarii mathematicis interfui per quattuor semestria, ubi mihi licuit de nonnullis rebus mathematicis disserere, cum adesset Ill. Fuchs, quem summa cum benevolentia studiis meis favisse pio animo confiteor.

THESEN.

I.

Die *Lie*'sche Theorie der continuierlichen Gruppen bildet wieder einen der Fälle, in denen der Analyst gegenüber dem Geometer — einem Ausspruche *Steiner*'s zufolge — seine ‚Schuldigkeit' gethan hat.

II.

Bei der Discussion einer vorgelegten Differentialgleichung sollte man sich immer fragen, ob es nicht vorteilhafter wäre statt mit dieser einen Gleichung mit einem passend gewählten Systeme von Differentialgleichungen zu operieren.

III.

Trotz mancher schlimmen Erfahrung, zu welcher die Anwendung der Geometrie auf die Analysis geführt hat, soll diese auch in Zukunft sich den durch jene gelieferten Methoden und Gesichtspunkten nicht verschliessen.

